Σύνοψη. $f: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $\bar{x} \in U$

• Η f λέγεται $\boxed{\text{διαφορίσιμη}}$ $\iff \exists D \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \frac{f(\bar{x}+\bar{h}) - f(\bar{x}) - D\bar{h}}{\|\bar{h}\|} = \bar{0}$$ <- όχι σ1s.

• Η f διαφορίσιμη $\Rightarrow$ f σ1s και μερικώς διαφορ
και $D = Jf(\bar{x})$ και τότε ο $Jf(\bar{x}) =: Df(\bar{x})$
ονομάζεται __παράγωγος της f στο $\bar{x}$__
[Αν αυτό ισχύει $\forall \bar{x} \in U$ τότε και η $Df: U \to \mathbb{R}^{m \times n}$
ονομάζεται __παράγωγος__ της f]

__Προσοχή:__ η απεικόνιση $\bar{h}$ απεικονίζεται
στο $Df(\bar{x})\bar{h}$ είναι γραμμική (αφού ο $Df(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$)
όμως η απεικόνιση $\bar{x} \to Df(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ δεν
είναι απαραίτητα γραμμική.

Συμβολίζεται και $df(\bar{x})$ και ονομάζεται
και διαφορικό της f στο $\bar{x}$.

ιακωβ. πίν

• Αν ο $Jf(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

υπάρχει $\forall \bar{x} \in U$. και $\frac{\partial f_i}{\partial f_j} : U \to \mathbb{R}$ είναι

σ1s συναρτήσεις τότε η f είναι διαφορίσιμη
στο $\bar{x}$ και λέμε ότι η παράγωγος $Df: U \to \mathbb{R}^{m \times n}$
είναι σ1s __και__ η f __συνεχώς διαφορίσιμη__

Άρα : f σ/ς μερικώς διαφορίσιμη $\Leftrightarrow$
f σ/ς διαφορίσιμη ($\Leftrightarrow$ όλες οι $\frac{\partial f_i}{\partial t_j}$ ∃

και είναι σ/ς) $\Longrightarrow$ f διαφορίσιμη

$\not\Longleftarrow$ (4) $\qquad$ $\Longrightarrow$ $\not\Longleftarrow$ (3) $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ σ/ς} \\ f \text{ μερικώς διαφορίσιμη} \end{array} \right.$

όταν έχω σ/ς διαφορισ τα έχω όλα.

{Αντιπαραδείγματα} (για $n=2$)

(1) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$ σ/ς, όχι μερ. διαφορ ($\Leftrightarrow$ όχι διαφορ } $\Rightarrow$ όχι σ/ς διαφορ).

(2) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ μερικώς διαφορίσιμη, όχι σ/ς

($\Rightarrow$ όχι διαφ $\rightarrow$ όχι σ/ς διαφορίσιμη)

$2ab \leq a^2+b^2$

(3) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ σ/ς, μερ διαφορ, αλλά όχι διαφορ ($\Rightarrow$ όχι σ/ς διαφορ).

[$\forall (x,y) \neq (0,0)$ $\quad Jf(x,y) = \text{grad} f(x,y) = \nabla f(x,y) =$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) = ;$$

και διαπιστώναμε ότι στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ είναι ~~σ/ς~~ συνεχείς οι 2

ο περιορισμός
$\Rightarrow f|\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ είναι σ/ς διαφορίσιμη συνάρτηση

Τι συμβαίνει για $(x,y)=(0,0)$;

Η f είναι σ/ς στο $(0,0)$ αφού
$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$

θ.ν.δ.ο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)=0$

δηλ αν $(x_\nu,y_\nu) \to (0,0)$, τότε $f(x_\nu,y_\nu)\to 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{x_\nu^2+y_\nu^2} \to 0$

③ συνέχεια

Αφού $f(x,0)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$
και $f(0,y)=0 \quad \forall y\in\mathbb{R}$
$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \Rightarrow$ άρα η

υπάρχει $\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}=(0,0)\right)=(0,0)$

δηλ η f είναι μερ. διαφ στο $(0,0)$
αλλά ισχυρισμός η f δεν είναι
διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Για να είναι η f διαφο στο $(0,0)$
και αφού υπάρχει $\nabla f(0,0)$
Θα πρέπει $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ [(x,y)\neq(0,0)]}} \frac{f(x,y)-\overbrace{f(0,0)}^{=0}-\nabla f(0,0)(x,y)}{\|x,y\|} = 0$ $\nexists(0,0)$

Εδώ το (x,y) =ε.σ

SOS

Άσκηση: Δ.Ο η $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

είναι διαφορίσιμη (σε όλο το $\mathbb{R}^2$)
αλλά δεν είναι σ.δ. διαφορίσιμη
« στο » $(0,0)$ (δηλ σε ένα $B((0,0),\varepsilon), \varepsilon>0$)
f σ.δ. στο $(0,0)$

Θ.ν.δ.ο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

δηλ $(x_\nu,y_\nu)\to(0,0) \Rightarrow \underbrace{f(x_\nu,y_\nu)}\to 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x_\nu^2+y_\nu^2}\to(0,0) \qquad \Leftrightarrow |f(x_\nu,y_\nu)|\to 0$

$\nabla f(0,0)^{\nu} = (0,0)^{\nu} = Df(0,0)$

αλλά οι $\frac{\partial f}{\partial x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial y}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ δεν είναι συνεχείς.

SOS SOS SOS

Θεώρημα (άλγεβρα Παραγώγων). Έστω
$U\subset\mathbb{R}^n$ ανοιχτό $\bar f,\bar g: U\to\mathbb{R}^m$
και $\varphi: U\to\mathbb{R}$ διαφορίσιμες στο $\bar x\in U$.

$\Rightarrow \underbrace{\bar f+\bar g}_{:U\to\mathbb{R}^m}, \underbrace{\bar f\cdot\bar g}_{:U\to\mathbb{R}^{m\cdot 1}}, \underbrace{a\bar f}_{:U\to\mathbb{R}^m}, \underbrace{\varphi\bar f}_{:U\to\mathbb{R}^m}$

είναι διαφορίσιμες στο $\bar x$ $\left(= (\dots) \text{ διά } 1\times n \text{ πίνακα}\right)$
και $D(\bar f+\bar g)(\bar x) = \underbrace{D\bar f(\bar x) + D\bar g(\bar x)}_{\in\mathbb{R}^{m\times n}}$,
$\underbrace{D(\bar f\cdot\bar g)(\bar x)}_{\in\mathbb{R}^{n} \text{ πίνακας-γραμμή}} = *$
Sos

$* = g(\bar{x})^T D\bar{f}(\bar{x}) + \bar{f}(x)^T D\bar{g}(\bar{x})$

$D(g\bar{f})(\bar{x}) = \varphi(\bar{x})\, D\bar{f}(x) + \bar{f}(x)\, D\varphi(\bar{x})$

Πάντα $\quad \bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ στήλη !!!